9. Énoncés des exercices

Exercice 12.1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}*$ par : $f(x) = \frac{\sin(x)\times\cos(x)}{x^2}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
1) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f.
2) En déduire l'équation de l'asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

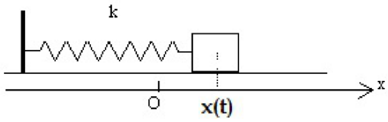
Exercice 12.2 Démontrer que l'équation $\cos(2x) + x = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Exercice 12.3 On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2;\frac{\pi}{2}}\right]$ par $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$.
1) Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et calculer l'expression de sa fonction dérivée
2) Étudier les variations de la fonction f

Exercice 12.4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |\cos(x)| + \cos(x)$
1) Étudier la parité de la fonction f
2) Étudier la périodicité de la fonction f
3) Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

Exercice 12.5 1) Démontrer que $\forall x \in [0; +\infty[: \sin(x) \leqslant x$.
2) En déduire que $\forall x \in [0; +\infty[: 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
3) En déduire enfin que $\forall x \in [0; +\infty[: x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$

Exercice 12.6 Un solide de masse $m = 0,2kg$ se déplace sans frottement sur un axe horizontal, relié à un ressort de constante de raideur $k = 3,6N.m^{-1}$ et de masse négligeable.



Pour tout réel positif t, l'abscisse $x(t)$ du centre de gravité du solide à l'instant t est définie par $x(t) = 2\cos(3\sqrt{2}t)$.
$x'(t)$ désigne la dérivée de $x(t)$ par rapport à t, et $x''(t)$ désigne la dérivée de $x'(t)$ par rapport à t ; on l'appelle "dérivée seconde" et on dit "x seconde".
Démontrer que pour tout réel positif t on a : $x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$.
Cette égalité traduit la propriété suivante :
Dans un mouvement rectiligne sinusoïdal, l'accélération x'' est proportionnelle à l'élongation x et de signe contraire.

Exercice 12.7 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
On note $\mathscr{D}_f$ son domaine de définition, $\mathscr{D}'_f$ son domaine de dérivabilité, E le domaine d'étude (domaine sur lequel on étudie la fonction après avoir éventuellement fait appel à des symétries etc...), $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Toutes les réponses aux questions 1 à 9 ci-dessous doivent être justifiées par un calcul.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la périodicité de f : est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?
3. Étudier la parité de f : est-elle paire ? Impaire ?
4. Déterminer grâce aux questions ci-dessus le domaine d'étude E.
5. Déterminer $\mathscr{D}'_f$, l'ensemble de dérivabilité de f.
6. Calculer f' et en déduire le sens de variation de f sur E.
7. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
8. Déterminer les limites éventuelles de f aux bornes de E
9. Dresser le tableau de variations de f
10. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère, pour des valeurs de x comprises entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.
11. Dans le cercle trigonométrique, on trace l'axe des tangentes à droite du cercle, tangent au cercle et perpendiculaire à l'axe de cosinus. On le gradue de la même manière que l'axe des sinus.
La graduation correspondant à l'intersection de l'axe des tangentes et de la demi-droite $[OM)$ donne la valeur de $\tan x$. Expliquer géométriquement les discontinuités de la fonction tangente (répondre par quelques phrases courtes, en essayant d'être à la fois concis et précis).
12. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sqrt{3}\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0$